Řešení příkladů
k přijímacím zkouškám z matematiky
pro akademický rok 2006/07
fakulta hospodářská

Varianta 1

1. Stanovte, pro která $z \in R$ má uvedený výraz smysl, a výraz zjednodušte:

$$\frac{\frac{2}{4}-\frac{z^2+1}{2}}{\frac{1}{2z}-\frac{1}{4}}:\frac{z^3}{z-3} \; .$$

Řešení:
Výraz má smysl pro $z \neq 3, z \neq 0, z \neq 2$.

$$\frac{\frac{2}{4}-\frac{z^2+1}{2}}{\frac{1}{2z}-\frac{1}{4}}:\frac{z^3}{z-3}=\frac{\frac{-z^2}{2}}{\frac{2-z}{4z}}\cdot\frac{z-3}{z^3}=\frac{-z^2\cdot 4z}{2(2-z)}\cdot\frac{z-3}{z^3}=\frac{2(3-z)}{2-z}.$$

2. Určete v intervalu $\langle 0,2\pi\rangle$ všechna řešení rovnice $\sin x\cos x-\sin x=-\frac{1}{2}\sin 2x$.

Řešení:

$\sin x\cos x-\sin x=-\frac{1}{2}\sin 2x=-\sin x\cos x$

$\sin x(2\cos x-1)=0$

$\sin x=0: x=0,\pi,2\pi$ v $\langle 0,2\pi\rangle$; $2\cos x-1=0: x=\pi/3, 5\pi/3$

Všechna řešení dané rovnice v intervalu $\langle 0,2\pi\rangle$ jsou $x=0, \pi/3, \pi, 5\pi/3, 2\pi$.

3. Součet prvních 5 členů aritmetické posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je 145, čtvrtý člen je roven 42. Určete diferenci d a první člen a_1 této posloupnosti.

Řešení:
$a_4 = a_1 + 3d$, $s_5 = 5a_1 + 10d$, tedy $a_1 + 3d = 42, 5a_1 + 10d = 145 \Leftrightarrow a_1 = 3, d = 13$.

4. Napište rovnici přímky q, která je kolmá k přímce p s rovnicí $3x + y - 1 = 0$ a prochází středem úsečky AB, kde A=[2, −3] , B=[6, −1].

Řešení:
Přímka kolmá k p má rovnici $-x + 3y + c = 0$. Střed úsečky AB je S = [4,2].
Určíme c: $-4 + 3 \cdot 2 + c = 0 \Rightarrow c = -2$. Přímka $q: -x + 3y - 2 = 0$.

5. Cena automobilu byla zvýšena o 10%. Poté byla cena automobilu snížena o 10 %. O kolik procent se změnila po těchto dvou úpravách cena automobilu? Je nová cena vyšší nebo nižší než cena původní?

Řešení:

$cn = c + 0{,}1c = 1{,}1c$, $cnn = cn - 0{,}1cn = 0{,}9cn$, koeficient změny je $1{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}99$.
Cena se snížila o 1 procento.

Varianta 2

1. Určete, pro která $x \in R$ je daný výraz definován, a zjednodušte jej.

$$\left(\frac{1}{x} - 2 + x\right)^{-1} + \left(\frac{1}{x-2} + x\right)^{-1}$$

Řešení: Výraz je definován pro všechna $x \neq 0, x \neq 2, x \neq 1$.

$$\left(\frac{1}{x} - 2 + x\right)^{-1} + \left(\frac{1}{x-2} + x\right)^{-1} = \left(\frac{1 - 2x + x^2}{x}\right)^{-1} + \left(\frac{1 + x^2 - 2x}{x-2}\right)^{-1} = \frac{2}{x-1}.$$

2. Určete a graficky znázorněte množinu všech $x \in R$, která splňují nerovnice
$5 < |5x - 15| \leq 15$.

Řešení:
1) $|5x - 15| \leq 15 \Leftrightarrow -15 \leq 5x - 15 \leq 15 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 6$;

2) $5 < |5x - 15|$ $\quad 5x - 15 > 5 \Leftrightarrow x > 4$

$\quad 5x - 15 < -5 \Leftrightarrow x < 2$

Obě nerovnice jsou splněny pro $x \in \langle 0, 2) \cup (4, 6\rangle$.

3. Prvky posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou definovány rekurentně formulí $a_{n+1} = a_n - n$. Určete člen a_1 víte-li, že $a_6 = 0$.

Řešení:

$a_6 = a_5 - 5 = a_1 - (1+2+3+4+5) = a_1 - 15 = 0 \Rightarrow a_1 = 15.$

4. Obvody dvou kruhů jsou v poměru 2:5. Určete v jakém poměru je obsah velkého kruhu ku malému.

Řešení:

Poměr obvodu malého kruhu ku velkému je $\dfrac{2\pi r}{2\pi R} = \dfrac{2}{5}$, tedy $r = \dfrac{2}{5}R$.

Poměr obsahu velkého kruhu ku malému je $\dfrac{\pi R^2}{\pi r^2} = \dfrac{\pi R^2}{\pi\left(\dfrac{2}{5}R\right)^2} = \dfrac{25}{4}$.

5. Určete v množině reálných čísel řešení rovnice s neznámou x.

$$27 \cdot 3^{4x-1} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x+2} 3^{3x}.$$

Řešení:

$$27 \cdot 3^{4x-1} = \left(\frac{1}{9}\right)^{x+2} \cdot 3^{3x} \Leftrightarrow 3^3 3^{4x-1} = \frac{1}{3^{2x+4}} 3^{3x} = 3^{x-4} \Leftrightarrow 4x+2 = x-4 \Leftrightarrow x = -2.$$

Varianta 3

1. Určete, pro která $a \in R$ je daný výraz definován, a zjednodušte jej.

$$\left(a + \frac{-a}{a-1}\right) \cdot \left(-\frac{4}{a} - \frac{-a}{a-1}\right)^{-1}$$

Řešení: Výraz je definován pro všechna $a \neq 0, a \neq 1, a \neq 2$.

$$\left(a + \frac{-a}{a-1}\right) \cdot \left(-\frac{4}{a} - \frac{-a}{a-1}\right)^{-1} = \frac{a^2-2a}{a-1}\left(\frac{a^2-4a+4}{a(a-1)}\right)^{-1} = \frac{a^2}{a-2}.$$

2. Určete rovnici přímky, která prochází středem kružnice $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$ a je kolmá k přímce $x - 2y + 6 = 0$.

Řešení:

$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 2^2;$
Střed kružnice S=[1,−3], přímka kolmá k přímce $x - 2y + 6 = 0$ má rovnici $2x + y + c = 0$.
Určíme c: 2+(−3)+c=0, c=1, rovnice hledané přímky je $2x + y + 1 = 0$.

3. Prvky posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou definovány rekurentně formulí $a_{n+1} = (2n-3)a_n + 1$. Určete členy a_1, a_2, a_3 víte-li, že $a_4 = 13$.

Řešení:

$a_2 = -a_1 + 1; \quad a_3 = a_1 + 1; \quad a_4 = 3a_1 + 1 = 13 \Rightarrow a_1 = 4; a_2 = -3; a_3 = 5.$

4. Cena výrobku byla zvýšena nejprve o 5% a poté nová cena ještě zvýšena o 10%. O kolik procent celkem se zvýšila původní cena výrobku?

Řešení:

$cn = c + 0,05 \cdot c = 1,05c \qquad cnn = cn + 0,1 \cdot cn = 1,1cn$ koeficient změny je $1,05 \cdot 1,1 = 1,155$.
Cena vzrostla celkem o 15,5%.

5. Určete v množině reálných čísel řešení rovnice s neznámou *x*.
$16^{\frac{x}{2}} + 2^{2x+3} = 576$.

Řešení:
$16^{\frac{x}{2}} + 2^{2x+3} = 576 \Leftrightarrow 2^{2x} + 2^{2x+3} = 2^{2x}(1+2^3) = 576 \Leftrightarrow 2^{2x} = 64 \Leftrightarrow x = 3.$

Varianta 4

1. Určete, pro která $z \in R$ je daný výraz definován, a zjednodušte jej.
$$\left(\frac{z+1}{z-2} - \frac{z}{z+1}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{4+z}{4z+1} - \frac{1}{z}\right)^{-1}$$

Řešení: Výraz je definován pro všechna $z \neq 0, z \neq \pm 1, z \neq 2, z \neq \frac{-1}{4}$.
$$\left(\frac{z+1}{z-2} - \frac{z}{z+1}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{4+z}{4z+1} - \frac{1}{z}\right)^{-1} = \left(\frac{4z+1}{(z-2)(z+1)}\right)^{-1} \left(\frac{z^2-1}{z(4z+1)}\right)^{-1} = \frac{z(z-2)}{z-1}.$$

2. Určete rovnici přímky, která prochází středem elipsy $x^2 - 4x + 4y^2 + 8y + 4 = 0$ a je rovnoběžná s osou 2. a 4. kvadrantu.

Řešení:

Rovnice elipsy je $\frac{(x-2)^2}{4} + (y+1)^2 = 1$. Střed elipsy je v bodě $S = [2, -1]$.
Osa 2. a 4. kvadrantu má rovnici $x + y = 0$. Rovnice hledané přímky je $x + y - 1 = 0$.

3. Geometrická posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má první prvek a_1=3 a qvocient 2. Určete nejmenší přirozené číslo n tak, aby součet prvních n členů $s_n > 183$.

Řešení:

$s_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q-1} = 3\dfrac{2^n - 1}{2-1} = 3\left(2^n - 1\right) \quad 3\left(2^n - 1\right) > 183 \Leftrightarrow 2^n > 62 \Rightarrow$ nejmenší přirozené $n = 6$.

4. Cena výrobku se zvýšila o 15%. Nová cena se poté snížila o 10 %. O kolik procent se změnila cena výrobku vzhledem k jeho původní ceně?

Řešení:

$cn = c + 0{,}15 \cdot c = 1{,}15c \quad cnn = cn - 0{,}1 \cdot cn = 0{,}9cn$ koeficient změny je $1{,}15 \cdot 0{,}9 = 1{,}035$.
Cena vzrostla celkem o 3,5%.

5. Určete v množině reálných čísel řešení dané rovnice s neznámou *x*.
$\log x + \log\left(x+1\right) = \log(3-x) + \log 1$

Řešení:

Rovnice má smysl pro všechna $-1 < x < 3$.
$\log x + \log\left(x+1\right) = \log(3-x) + \log 1 \Leftrightarrow \log x\left(x+1\right) = \log(3-x)$
$x^2 + 2x - 3 = 0.$ Řešení kvadratické rovnice $x = 1, x = -3,$ dané úloze vyhovuje pouze $x = 1$.

Varianta 5

1. Určete, pro která $x \in R$ je daný výraz definován, a zjednodušte jej.
$\left(\dfrac{1-2x}{x+2} + 2\right) : \left(\dfrac{2x+1}{x+2} - x\right)$

Řešení: Výraz je definován pro všechna $x \neq -2, x \neq \pm 1$.
$\left(\dfrac{1-2x}{x+2} + 2\right) : \left(\dfrac{2x+1}{x+2} - x\right) = \dfrac{5}{x+2} : \dfrac{1-x^2}{x+2} = \dfrac{5}{1-x^2}.$

2. Určete a graficky znázorněte množinu všech $x \in R$, které splňují nerovnici
$x^2 + x - 6 > 24$.

Řešení:

Určíme průsečíky s osou $x: x^2 + x - 30 = 0 \quad x = -6, x = 5.$
Nerovnost je splněna pro všechna $x \in (-\infty, -6) \cup (5, +\infty)$.

3. Součet $a_2 + a_5$ členů aritmetické posloupnosti $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ je 14, sedmý člen je roven 21.
Určete první člen a_1 a diferenci *d* této posloupnosti.

Řešení:

$a_2 + a_5 = 14 \Leftrightarrow 2a_1 + 5d = 14, \quad a_7 = a_1 + 6d = 21.$ Diference $d = 4$, člen $a_1 = -3$.

4. Určete koeficienty *a, b, c* přímky $a x + b y + c = 0$ procházející bodem P=[0,−1] a kolmé k přímce, která je určena body A=[−1,1], B=[1,−3].

Řešení:

Směrový vektor přímky p určené body A, B je $(1,-2)$, rovnice přímky p je $2x+y+1=0$.

Přímka q kolmá k přímce p má rovnici $-x+2y+c=0$. Bod P leží na $q \Rightarrow c=2$.

Hledaná přímka má rovnici $-x+2y+2=0$.

5. Určete v množině reálných čísel řešení rovnice s neznámou *x*.

$\log_4 3 = 2\log_4(x+2) - \log_4(x^2-4)$

Řešení:

Rovnice má smysl pro všechna $x > 2$.

$$\log_4 3 = 2\log_4(x+2) - \log_4(x^2-4) \Rightarrow \log_4 3 = \log_4 \frac{(x+2)^2}{x^2-4}$$

tedy $3 = \dfrac{x+2}{x-2} \Rightarrow 3(x-2) = x+2 \Leftrightarrow x = 4.$

Varianta 6

1. Stanovte, pro která $a \in \mathbf{R}$ je daný výraz definován, a výraz zjednodušte:

$$\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) : \frac{a^2b^2}{a^2-b^2}$$

Řešení:

Výraz má smysl, pokud jsou splněny následující podmínky: $a \neq -b$, $a \neq b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

$$\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) : \frac{a^2b^2}{a^2-b^2} = \frac{(a+b)(a+b)-(a-b)(a-b)}{(a-b)(a+b)} : \frac{a^2b^2}{a^2-b^2} =$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)}{a^2-b^2} : \frac{a^2b^2}{a^2-b^2} = \frac{4ab}{a^2-b^2} : \frac{a^2b^2}{a^2-b^2} = \frac{4}{ab}.$$

2. Určete množinu všech $x \in$ **R,** která splňují nerovnost

$3x - |2x-1| \leq 5 - x$.

Řešení:

$$x \in \langle +\frac{1}{2}, 2\rangle \cup (-\infty, \frac{1}{2}) \quad \Rightarrow x \in (-\infty, 2\rangle \ .$$

3. V geometrické posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$ vypočítejte kvocient q , členy a_{n+1} a a_{n+3}, jestliže $a_n = 6$ a $a_{n+2} = 24$.

Řešení:

$a_{n+2} = a_n.q^2$, $24 = 6.q^2$, dva kořeny rovnice $q_1 = 2$, $q_2 = -2$, pro q_1 je $a_{n+1} = \dfrac{6}{2} = 3$,

$a_{n+3} = 24.q_1 = 48$; pro q_2 je $a_{n+1} = \dfrac{6}{-2} = -3$, $a_{n+3} = 24.q_2 = -48$.

4. Napište rovnici kružnice, která prochází počátkem soustavy souřadnic, bodem A=[2, 4] a má střed na ose *x*.
Řešení:
Střed kružnice S=[*x*, 0], platí vzdálenost *d*(AS) = *d*(PS), $\sqrt{(2-x)^2+4^2}=\sqrt{x^2}$
$\Rightarrow\quad x=5\quad\Rightarrow$ S=[5, 0], rovnice hledané kružnice je $(x-5)^2+y^2=25$.

5. Zásoba výrobku ve skladu se nejdříve zvýšila o 10% a pak se takto upravená zásoba zvýšila opět o 10%. O kolik procent se zvýšila zásoba výrobku vzhledem k původní zásobě?
Řešení:
Nové množství výrobku $m_n=m+\frac{m}{10}$, množství výrobku po opětovném navýšení zásoby

$$m_{nn}=m_n+\frac{m_n}{10}=m+\frac{m}{10}+\cdot\frac{m+\frac{m}{10}}{10}=m+\frac{m}{10}+\frac{m}{10}+\frac{m}{100}=m+\frac{10+10+1}{100}m=m+\frac{21}{100}m.$$

Alternativní řešení: 1,1 . 1,1 = 1,21.
Závěr: Zásoba výrobku se zvýšila vzhledem k původní zásobě o 21%.

Varianta 7

1. Stanovte, pro která $a\in\mathbf{R}$ je daný výraz definován, a výraz zjednodušte:

$$\frac{(2+a)\cdot\left(1-\frac{4}{a}+\frac{4}{a^2}\right)}{1-\frac{4}{a^2}}$$

Řešení:
Výraz má smysl, pokud jsou splněny podmínky $a\neq-2$, $a\neq0$, $a\neq2$.

$$\frac{(2+a)\left(1-\frac{4}{a}+\frac{4}{a^2}\right)}{1-\frac{4}{a^2}}=\frac{(a+2)(a-2)^2}{(a-2)(a+2)}=a-2\,.$$

2. Určete $x\in\mathbf{R}$**,** která splňují rovnici $\log(x+4)-\log(x-5)=1$.
Řešení:
Levá strana rovnice definována pro $x>5$, $\log\frac{x+4}{x-5}=1\Rightarrow\quad\frac{x+4}{x-5}=10\Rightarrow x=6$.

3. Určete, jakou podmínku musí splňovat první člen aritmetické posloupnosti s diferencí $d=5$, aby pro součet s_{20} prvních 20 členů posloupnosti platilo $s_{20}\geq1000$.
Řešení:
$s_{20}=\frac{a_1+a_{20}}{2}\cdot20\Rightarrow\frac{a_1+a_1+19\cdot5}{2}\cdot20\geq1000\Rightarrow a_1\geq\frac{5}{2}$.

4. Stanovte, pro jaké hodnoty $a\in R$ jsou přímky p_1: $3x+ay-1=0$ a p_2: $-x+2y+4=0$ rovnoběžné.

Řešení:
Označme u směrový vektor přímky p_1 a v směrový vektor přímky p_2. Pak $u = (-a, 3)$, $v = (-2, -1)$ $\Rightarrow$ $-a = k(-2)$, $3 = k(-1)$ $\Rightarrow$ $a = -6$.

5. Cena výrobku se nejdříve zvýšila o 20%, pak však nová cena klesla o 50%. O kolik procent se snížila cena výrobku vzhledem k jeho původní ceně?
Řešení:
Původní cena výrobku c, po zvýšení ceny o 20% nová cena výrobku
$c_n = c + \frac{2c}{10}$, po snížení o 50% konečná cena

$$c_{nn} = c_n + \frac{2c}{10} - \frac{5}{10}\left(c + \frac{2}{10}c\right) = c + \frac{2}{10}c - \frac{5}{10}c - \frac{10}{100}c = c - \frac{3}{10}c - \frac{1}{10}c = c - \frac{4}{10}c.$$

Alternativní řešení: 1,2 . 0,5 = 0,6 ; 1,0 – 0,6 = 0,4.
Závěr: Cena výrobku klesla vzhledem k původní ceně o 40%.

Varianta 8

1. Stanovte, pro která $a \in \mathbf{R}$ je daný výraz definován, a výraz zjednodušte:

$$\left(1 + \frac{1}{a-1}\right) : \left(1 - \frac{1}{1+a}\right)$$

Řešení:
Výraz má smysl, pokud jsou splněny podmínky $a \neq -1$, $a \neq 0$, $a \neq 1$.

$$\left(1 + \frac{1}{a-1}\right) : \left(1 - \frac{1}{1+a}\right) = \frac{a}{a-1} : \frac{a}{a+1} = \frac{a(a+1)}{a(a+1)} = \frac{a+1}{a-1}\ .$$

2. Určete $x \in \mathbf{R}$, která splňují rovnici $2^{x+1} + 2^{x-1} + 2^{x+3} = \frac{21}{8}$.

Řešení:

$$2^{x-1}(2^2 + 1 + 2^4) = \frac{21}{2^3}\ ,\quad 21 \cdot 2^{x-1} = \frac{21}{2^3}\ ,\quad 2^{x-1} = 2^{-3},\ x = -2.$$

3. V aritmetické posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$ je první člen $a_1 = 18$, diference $d = -5$. Určete přirozené číslo n takové, aby platilo $a_n + a_{n+3} = -189$.
Řešení:
$a_n = a_1 + (n-1)d = -5n + 23$, $\quad a_{n+3} = a_1 + (n+2)(-5) = -5n + 8$,
$-5n+23-5n+8 = -189 \Rightarrow -10n + 31 = -189$, hledané $n = 22$.

4. Napište rovnici přímky, která prochází bodem A=[0, 3] a průsečíkem přímky p: $2x + 3y - 6 = 0$ s osou x.
Řešení:
Průsečík přímky p s osou x bod B=[3, 0], hledaná přímka q prochází body A, B; dosadíme souřadnice bodů do hledané rovnice přímky q: $ax + by + c = 0$ a obdržíme rovnice $3b + c = 0$, $\quad 3a + c = 0 \Rightarrow a = b$, do rovnice $x + y + c = 0$ dosadíme bod B $\Rightarrow c = -3$ $\Rightarrow$ rovnice hledané přímky $q: x + y - 3 = 0$.

5. Cena výrobku se zvýšila o 20%, nová cena výrobku se opět zvýšila o 10%. O kolik procent se zvýšila původní cena výrobku?
Řešení:
Původní cena výrobku c, po zvýšení cena $c_n = c + \frac{20c}{100}$, po následném zvýšení ceny

$$c_{nn} = c_n + \frac{10c_n}{100} = c + \frac{20}{100}c + \left(c + \frac{20}{100}c\right)\cdot\frac{10}{100} = \frac{120}{100}c + \frac{120}{100}\cdot\frac{10}{100} = \frac{120+12}{100}c = \frac{132}{100}c$$

Alternativní řešení: 1,2 . 1,1 = 1,32.
Závěr: Původní cena výrobku se zvýšila o 32%.

Varianta 9

1. Stanovte, pro která $a \in \mathbf{R}$ je daný výraz definován, a výraz zjednodušte:

$$\left(\frac{a}{a-2} - \frac{a}{a+2}\right) : \frac{4}{a^3 - 2a^2}$$

Řešení:
Výraz má smysl, pokud jsou splněny následující podmínky: $a \neq -2,\ a \neq 0,\ a \neq 2$.

$$\left(\frac{a}{a-2} - \frac{a}{a+2}\right) : \frac{4}{a^3 - 2a^2} = \frac{a^2 + 2a - a(a-2)}{(a+2)(a-2)} : \frac{4}{a^2(a-2)} =$$

$$\frac{a^2 + 2a - a^2 + 2a}{(a+2)(a-2)} : \frac{4}{a^2(a-2)} = \frac{4a}{(a+2)(a-2)} : \frac{4}{a^2(a-2)} = \frac{a^3}{a+2}.$$

2. Určete $x \in \mathbf{R}$, která splňují rovnici
$\log(2x+9) - 2\log x + \log(x-4) = 2 - \log 50$.
Řešení:
Rovnice je definována pro všechna $x>4$, $\log\left(\frac{2x+9}{x^2}(x-4)\right) = \log\frac{100}{50} \quad \Rightarrow$,

$$\frac{2x+9}{x^2}(x-4) = 2 \quad \Rightarrow x = 36 \ .$$

3. Sečtěte všechna přirozená čísla počínaje hodnotou 10 a konče hodnotou 190.
Řešení.
Jde o součet členů aritmetické posloupnosti, $a_1 = 10$, $a_{181} = 190$, diference $d = 1$,
$s_{181} = \frac{10+190}{2}\cdot 181 = \frac{200}{2}\cdot 181 = 18100$, což je hledaný součet.

4. Trojúhelník ABC má vrcholy A=[−1, 0], B=[6, −3], C=[2, 5]. Napište rovnici přímky, na níž leží výška v_a na stranu BC.
Řešení:
Vektor $\overrightarrow{C-B}$ = (−4, 8) = 4.(−1, 2), kolmý vektor k $\overrightarrow{C-B}$ je vektor (2, 1), rovnice výšky v_a: $x - 2y + c = 0$, do této rovnice dosadíme souř. bodu A a obdržíme $\Rightarrow c = 1 \Rightarrow$ rovnice výšky v_a: $x - 2y + 1 = 0$.

5. První výrobní linka podniku je k dnešnímu dni užívána třikrát déle než druhá výrobní linka. Po dalších pěti letech užívání obou výrobních linek však bude pouze dvakrát déle užívána. Jak dlouho jsou k dnešnímu dni obě linky užívány?
Řešení: doba užívání 1. linky x, doba užívání druhé linky y, řešíme soustavu 2 lineárních rovnic o 2 neznámých: $x = 3y; \quad x + 5 = 2(y + 5) \quad \Rightarrow x = 15,\ y = 5$.

Varianta 10

1. Stanovte, pro která $a \in \mathbf{R}$ je daný výraz definován, a výraz zjednodušte:

$$\left(\frac{1}{a+1} - \frac{2a}{a^2-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{a} - 1\right)$$

Řešení:
Výraz má smysl pro $a \neq -1$, $a \neq 0$, $a \neq 1$.

$$\left(\frac{1}{a+1} - \frac{2a}{a^2-1}\right) \cdot \left(\frac{1}{a} - 1\right) = \frac{a-1-2a}{a^2-1} \cdot \frac{1-a}{a} = \frac{-a-1}{a^2-1} \cdot \frac{1-a}{a} = \frac{1}{a}.$$

2. Určete $x \in \mathbf{R}$, která splňují rovnici $7 \cdot 4^{-x+2} = 3 \cdot 4^{-x+3} - 5$.
Řešení:
$7 \cdot 4^{-x+2} = 3 \cdot 4^{-x+3} - 5, \quad 4^{-x+2}(7 - 3.4) = -5, \quad x = 2.$

3. V aritmetické posloupnosti $\{a_n\}_1^\infty$ je první člen $a_1 = 21$, diference $d = 2$. Určete všechna přirozená čísla n taková, že pro součet s_n prvních n členů posloupnosti je $s_n \geq 12000$.
Řešení:

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{(42 + 2(n-1))n}{2} \geq 12000, \quad 40n + 2n^2 \geq 24000,$$

$n^2 + 20n \geq 12000$, $n^2 + 20n - 12000 \geq 0$, $(n + 120) \cdot (n - 100) \geq 0$, požadavek $s_n \geq 12000$ splněn pro $n \geq 100$.
Alternativní řešení: $n.(n+20) \geq 12000 = 100.120 \Rightarrow n \geq 100$.

4. Napište rovnici přímky, která prochází středem úsečky AB, kde A=[3, 6], B=[1, 2], a je rovnoběžná s přímkou danou rovnicí $x - 2y + 10 = 0$.
Řešení: střed úsečky AB označme S=[2, 4], rovnice hledané přímky: $x - 2y + c = 0$, po dosazení bodu S do rovnice přímky obdržíme $c = 6$, rovnice hledané přímky: $x - 2y + 6 = 0$.

5. První výrobní linka závodu vyprodukuje požadovaný počet výrobků za 3 hodiny, druhá výrobní linka vyprodukuje stejný počet výrobků za 2 hodiny. Za jak dlouho vyprodukuje závod požadovaný počet výrobků, pokud budou pracovat obě linky současně?

Řešení:
Označme m požadované množství výrobků, za 1 hodinu společné výroby produkce $\frac{m}{3} + \frac{m}{2} = \frac{5}{6}m$, celkový počet m výrobků při společné produkci obou linek zpracován za $1\frac{1}{5}$ hod. = 1hod. 12 min.